Pergamon

Topology Vol. 36, No. 3, pp. 695–710, 1997

0040-9383/96/\$17.00+0.00

PII: S0040-9383(96)00028-6

COMPACITÉ DE L'ENSEMBLE DES RÉSEAUX ISOSPECTRAUX ET CONSÉQUENCES

HUBERT PESCE

(*Received* 27 *October* 1995)

1. INTRODUCTION

Soient $(X, \mathbf{m})$ une variété riemannienne fermée (i.e. sans bord, connexe et compacte) et Δ l'opérateur de Laplace–Beltrami opérant sur $C^\infty(X)$. Cet opérateur possède un spectre discret qui s'appelle le spectre de la variété. Une question naturelle est de savoir dans quelle mesure le spectre détermine la géométrie de la variété. En particulier, deux variétés isospectrales sont-elles isométriques? Depuis l'exemple de Milnor, on sait que la réponse à cette question est négative. De plus, la construction par Gordon et Wilson de déformations isospectrales a montré que, en général, l'ensemble des variétés ayant un spectre donné non seulement ne se réduit pas à une classe d'isométrie mais peut en contenir une infinité non dénombrable. Il se trouve cependant que l'ensemble des classes d'isométries parcouru lors des déformations isospectrales de Gordon et Wilson est compact et la compacité de l'ensemble des variétés ayant un spectre donné semble être le seul résultat d'ordre général que l'on puisse espérer obtenir. Ce résultat a été démontré en dimension 2 par Osgood *et al.* [1] et des résultats partiels en dimension 3 ont été obtenus par Brooks *et al.* [2].

Dans cet article, on s'intéresse au cas des variétés localement isométriques. On est alors dans le cadre suivant: $(X, \mathbf{m})$ est une variété riemannienne que l'on fixe une fois pour toutes et on considère des variétés riemanniennes du type $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$ où Γ est un sous-groupe discret d'un groupe G d'isométries de $(X, \mathbf{m})$ qui opère librement sur X de sorte que $\Gamma\backslash X$ soit une variété compacte et $\mathbf{m}_\Gamma$ est la métrique induite par $\mathbf{m}$. A l'exception d'un exemple récemment construit par Gordon, tous les exemples de couples de variétés isospectrales et non isométriques, y compris les déformations isospectrales de Gordon et Wilson, connus à ce jour sont de la forme $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_1})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_2})$ où Γ_1 et Γ_2 sont deux groupe discrets d'isométries. Il est donc naturel de considérer l'ensemble $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$ des sous-groupes Γ d'un groupe d'isométries G tels que $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$ soit une variété compacte ayant même spectre qu'une variété $(\Gamma_0\backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_0})$ donnée. Le principal résultat de cet article est que l'ensemble $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$ est compact. Pour cela, on montre que le spectre de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$ détermine la longueur de la plus petite géodésique périodique de cette variété qui ne se relève pas en une géodésique périodique de $(X, \mathbf{m})$. On utilise ensuite la généralisation du critère de Mahler due à Chabauty. On montre ensuite que si la variété X est analytique et si le groupe G vérifie une hypothèse technique qui est vérifiée par tous les groupes usuels, alors $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes par arcs. De plus ces composantes connexes par arcs ont une structure d'ensemble analytique.

L'existence des déformations isospectrales de Gordon et Wilson montrant qu'on ne peut espérer, en général, un meilleur résultat que la compacité de $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$, on peut se demander quelle hypothèse portant sur les groupes d'isométries forcerait $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$ à être petit. Le résultat obtenu est que si les groupes d'isométries considérés sont soit compacts, soit semi-simple sans facteur compact, alors les éléments de $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$ donnent lieu à un nombre fini de classes d'isométries.

Le but de la quatrième partie est d'obtenir un résultat analogue concernant le spectre des longueurs. Rappelons que le spectre des longueurs d'une variété riemannienne $(X, \mathbf{m})$ est l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques qui ont une longueur minimale parmis toutes les courbes périodiques de leur classe d'homotopie libre, la multiplicité d'une longueur l étant égale au nombre de classes d'homotopie libre de X dont la plus petite géodésique périodique est de longueur l. Il est bien connu qu'il existe de profondes relations entre le spectre du laplacien et le spectre des longueurs et on peut penser obtenir une résultat analogue à celui obtenu pour le spectre du laplacien. Le résultat obtenu est malheureusement plus faible. On montre en effet que l'ensemble $L - \mathscr{I}sos(\Gamma_0)^C$ des sous-groupes Γ d'un groupe d'isometries G tels que $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$ soit une variété compacte ayant même spectre des longueurs qu'une variété $(\Gamma_0\backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_0})$ et un volume $\leqslant C$ est compact. L'hypothèse portant sur la majoration du volume est peu naturelle et sans doute superflue et on peut s'en passer dans le cas des espaces localement symétriques à courbure négative.

La dernière partie de cette article est consacrée à l'application des résultats précédemment obtenus à des problèmes de représentations. Le lien entre les problèmes d'isospectralité et ceux de représentations se fait à travers le théorème de Sunada [21]. Pour cela, si Γ est un sous-groupe discret d'un groupe G d'isométries, on note π_Γ la représentation de G induite par la représentation triviale de Γ. Le théorème de Sunada nous dit que si Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes de G tels que les représentations π_{Γ_1} et π_{Γ_2} soient équivalentes, alors les variétés sont $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_1})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_2})$ sont isospectrales. On est donc amené à se demander quelles propriétés du groupe Γ se lisent dans π_Γ. En particulier, la représentation π_Γ détermine-t-elle Γ à conjugaison prés? La réponse à cette question est négative et on peut même construire des déformations continues de sous-groupes discrets qui induisent des représentations équivalentes, c'est d'ailleurs ce qui se passe lors des déformations de Gordon et Wilson. On voit donc que, comme pour les problèmes d'isospectralité, on ne peut espérer montrer, en général, autre chose qu'un résultat de compacité. C'est le but de la dernière partie que de montrer que Γ_0 est un sous-groupe discret et co-compact d'un groupe de Lie connexe G, alors l'ensemble $\mathscr{R}ep(\Gamma_0)$ des sous-groupes Γ qui sont tels que les représentations π_Γ et π_{Γ_0} soient équivalentes est un ensemble compact. On montre ensuite que sous les mêmes hypothèses que dans la partie précédente, l'ensemble $\mathscr{R}ep(\Gamma_0)$ se réduit à une réunion finie de classes de conjugaison. Finalement, on montre que si G est simplement connexe, résoluble et n'a que des racines réelles, en particulier si G est nilpotent, alors $\mathscr{R}ep(\Gamma_0)$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

2. QUELQUES RAPPELS

Le but de cette partie est d'énoncer la généralisation du critère de Mahler due à Chabauty et de rappeler les propriétés de base sur les domaines fondamentaux.

Rappelons tout d'abord que si G est un sous-groupe fermé du groupe des isométries d'une variété riemannienne $(X, \mathbf{m})$ et si μ_G est une mesure de Haar sur G, alors [3, p. 1070] il existe une unique mesure ρ_G sur $G\backslash X$ telle que, en notant $v_\mathbf{m}$ la mesure riemannienne, pour toute fonction φ qui est C^∞ et à support compact on ait:

$$\int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}v_\mathbf{m}(x) = \int_{G\backslash X}\left(\int_G \varphi(g\,.\,x)\,\mathrm{d}\mu_G(g)\right)\mathrm{d}\rho_G(x).$$

Notons que ce résultat s'applique en particulier quand $(X, \mathbf{m})$ est un groupe de Lie muni d'une métrique invariante à gauche et G un sous-groupe discret que l'on note alors Γ. On prend alors comme mesure μ_Γ la mesure de dénombrement.

On considère maintenant un groupe de Lie G et on veut munir l'ensemble $\mathscr{M}_G$ des sous-groupes discrets de G d'une topologie. Pour cela, si U est un ouvert, K un compact et Γ_0 est un sous-groupe discret, on définit $\mathscr{V}_{\Gamma_0, U, K}$ comme étant l'ensemble des Γ dans $\mathscr{M}_G$ tels que $\Gamma_0 \cap K \subseteq \Gamma U$ et $\Gamma \cap K \subseteq \Gamma_0 U$. La topologie engendrée par les $\mathscr{V}_{\Gamma_0, U, K}$ s'appelle la topologie de Chabauty. On vérifie facilement que, muni de cette topologie, $\mathscr{M}_G$ est métrisable, puisque c'est un espace régulier à base dénombrable. Finalement, rappellons que, une mesure de Haar étant fixée, on note ρ_Γ la mesure naturelle sur $\Gamma \backslash G$ définie au début du paragraphe. On peut maintenant énoncer le critère de Mahler [4]:

PROPOSITION 1. *Soient G un groupe de Lie et U un ouvert de G contenant l'élément neutre e, alors l'ensemble des sous-groupes Γ de G tels que $\Gamma \cap U = \{e\}$ est un compact de $\mathscr{M}_G$. De plus, si une suite $\{\Gamma_n\}_{n \geqslant 1}$ d'éléments de ce compact converge vers un groupe Γ, alors $\rho_\Gamma(\Gamma \backslash G) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \rho_{\Gamma_n}(\Gamma_n \backslash G)$.*

On peut se demander si deux groupes proches pour la topologie de Chabauty se ressemblent d'un point de vue algébrique. Même dans les cas simples, ceci n'est pas vrai: il suffit de regarder le cas où $G = \mathbb{R}$ et de prendre $\Gamma_n = n\mathbb{Z}$ et $\Gamma = \{0\}$. Il est immédiat que Γ_n converge vers Γ mais Γ_n et Γ ne sont jamais isomorphes. Cependant, si on l'on ne considère que des sous-groupes cocompacts, on évite ce genre de phénomène [5]:

PROPOSITION 2. *Soit G un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes, alors, si l'on note $\mathscr{M}_G^C$ l'ensemble des sous-groupes Γ de G qui sont discrets et tels que $\Gamma \backslash G$ soit compact:*

(a) *$\mathscr{M}_G^C$ est ouvert dans $\mathscr{M}_G$.*

(b) *Si Γ est dans $\mathscr{M}_G^C$, alors il existe un voisinage de Γ dont tous les éléments sont deux à deux isomorphes. De plus, si Γ_n est une suite qui converge vers Γ, alors, pour n assez grand, il existe un isomorphisme φ_n de Γ vers Γ_n tel que pour tout γ dans Γ, on ait: $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(\gamma) = \gamma$.*

Pour terminer cette partie, on va faire quelques rappels sur les domaines fondamentaux. On considère une variété riemannienne $(X, \mathbf{m})$ et un groupe discret d'isométries Γ qui opère librement sur X. On appelle domaine fondamental pour Γ tout ensemble mesurable D tel que $X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma . D$, et, si $v_{\mathbf{m}}$ désigne la mesure riemannienne associée à $\mathbf{m}$, alors $v_{\mathbf{m}}(D \cap \gamma . D) = 0$ pour tout γ non trivial. On vérifie facilement que $v_{\mathbf{m}}(D)$ est indépendant du choix de D et est égal au volume du quotient $\Gamma \backslash X$ muni de la métrique induite par $\mathbf{m}$. Un exemple classique de domaine fondamental est le domaine de Dirichlet que l'on définit comme suit: on fixe x dans X et on note $D_\gamma(x)$ l'ensemble des y dans X qui sont tels que $d(y, x) \leqslant d(y, \gamma x)$ et $D_\Gamma(x) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma(x)$. On vérifie facilement que $D_\Gamma(x)$ est un domaine fondamental et que $D_\Gamma(x)$ est compact si et seulement si la variété quotient $\Gamma \backslash X$ l'est. On peut maintenant montrer:

LEMME 3. *Soient G un sous-groupe fermé, ayant un nombre fini de composantes connexes, du groupe des isométries d'une variété riemannienne $(X, \mathbf{m})$ et $\{\Gamma_n\}_{n \geqslant 1}$ une suite de sous-groupes discrets de G qui converge vers un sous-groupe Γ qui opère librement sur X et tel que les quotients $\Gamma_n \backslash X$ et $\Gamma \backslash X$ soient compacts, alors:*

(a) *Pour tout x dans X, il existe un compact K de X tel que $D_\Gamma(x)$ et $D_{\Gamma_n}(x)$ soient inclus dans K, et ce pour tout n.*

(b) *Pour tout x dans X, on a*: $\lim_{n\to+\infty} v_{\mathbf{m}}(D_{\Gamma_n}(x)) = v_{\mathbf{m}}(D_\Gamma(x))$.

(c) *Il existe une suite θ_n, définie pour n assez grand, de difféomorphismes de X qui converge vers l'identité pour la topologie C^∞ telle que l'on ait $\Gamma_n = \theta_n \Gamma \theta_n^{-1}$.*

Preuve. Remarquons tout d'abord que, puisque l'action de G sur X est propre, la compacité de $\Gamma\backslash X$ entraine celle de $\Gamma\backslash G$. Montrons tout d'abord que, c étant un réel positif et x un élément de X, si l'on note $D_\gamma^c(x)$ l'ensemble des y dans X qui sont tels que $d(y,x) \leqslant d(y,\gamma x) + c$ et $D_\Gamma^c(x) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} D_\gamma^c(x)$, alors $D_\Gamma^c(x)$ est compact. Pour cela, on remarque que $\min_{\gamma\in\Gamma} d(y,\gamma x)$ est égal à la distance riemannienne (pour la métrique induite par $\mathbf{m}$ sur $\Gamma\backslash X$) des projections de x et de y dans $\Gamma\backslash X$. On en déduit que si y est dans $D_\Gamma^c(x)$, alors $d(y,x) \leqslant \operatorname{diam}(\Gamma\backslash X) + c$. Il en résulte que $D_\Gamma^c(x)$ est fermé et borné, donc compact. On utilise maintenant le fait [5, p. 484, Lemme 7.2a] qu'il existe un compact W de G tel que $G = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma . W$ et pour tout n on ait $G = \bigcup_{\gamma\in\Gamma_n} \gamma . W$. Posons $c = \sup_{w\in W} d(x, w.x)$ et montrons que $D_{\Gamma_n}(x) \subseteq D_\Gamma^c(x)$. Soient y dans $D_{\Gamma_n}(x)$ et γ dans Γ, il existe w dans W et γ_n dans Γ_n tels que $\gamma = \gamma_n w$ et on en déduit que $d(y,x) \leqslant d(y,\gamma_n . x) \leqslant d(y,\gamma . x) + d(\gamma . x, \gamma_n . x) \leqslant d(y,\gamma . x) + c$. Ceci étant vrai pour tous les éléments γ de Γ, on a bien le résultat annoncé. La partie (a) du Lemme est donc démontrée et on peut prendre comme compact $K = D_\Gamma^c(x)$.

La partie (b) se montre facilement en utilisant le fait que la fonction caractéristique de $D_{\Gamma_n}(x)$ converge presque partout vers celle de $D_\Gamma(x)$ quand n tend vers l'infini et en appliquant le théorème de convergence dominée, théorème que l'on peut utiliser d'aprés la partie (a) du Lemme.

Pour montrer la partie (c), on utilise les résultats de [6]. On note $\mathscr{R}_0 = \mathscr{R}_0(\Gamma, G)$ l'ensemble des homomorphismes ρ de Γ dans G tels que $\rho(\Gamma)$ soit un sous-groupe discret et co-compact de G. On munit, dans un premier temps, $\mathscr{R}_0$ de la topologie de la convergence simple, puis d'un structure d'ensemble analytique [6, p. 382]. D'aprés la proposition précédente, il existe une suite φ_n d'isomorphismes de Γ vers Γ_n qui converge dans $\mathscr{R}_0$ vers l'inclusion i de Γ dans G. Pour n assez grand, φ_n est dans un voisinage connexe par arcs de i. La partie (c) se montre alors en reprenant les preuves de [7, Theorem 4, p. 59] et [8, Theorem 6.19, p. 100]. □

Remarque 4. Dans les articles [5] et [6], les auteurs considèrent des groupes de Lie connexes. On vérifie cependant que les résultats que l'on a cités restent vrais pour des groupes ayant un nombre fini de composantes connexes.

3. PREUVE DU RÉSULTAT PRINCIPAL

Précisons tout d'abord le cadre dans lequel on va se placer. On considère un sous-groupe fermé G du groupe des isométries d'une variété riemannienne $(X, \mathbf{m})$ et on suppose qu'il existe un sous-groupe discret Γ de G tel que $\Gamma\backslash X$ soit une variété compacte. Comme le groupe Γ est un groupe d'isométries, la métrique $\mathbf{m}$ induit une métrique $\mathbf{m}_\Gamma$ sur $\Gamma\backslash X$ de sorte que la projection de $(X, \mathbf{m})$ sur $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$ soit un revêtement riemannien. Finalement, l'ensemble $\mathscr{M}_G$ des sous-groupes discrets de G sera muni par la suite de la topologie décrite dans la première partie. On peut maintenant énoncer le résultat principal:

PROPOSITION 5. *Soit Γ_0 un groupe discret contenu dans un sous-groupe G ayant un nombre fini de composantes connexes du groupe des isométries d'une variété riemannienne $(X, \mathbf{m})$ tel que $\Gamma_0\backslash X$ soit une variété compacte. Alors l'ensemble $\mathscr{I}so(\Gamma_0)$ des sous-groupes discrets Γ de*

G tels $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$ *soit une variété compacte qui ait même spectre du laplacien que* $(\Gamma_0\backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_0})$ *est une partie compacte de l'ensemble* $\mathcal{M}_G$ *des sous-groupes discrets de G. De plus, il n'existe qu'un nombre fini de type de difféomorphisme pour les variétés* $\Gamma\backslash X$ *quand* Γ *parcourt* $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$.

La preuve étant beaucoup plus simple lorsque X est compacte, nous allons traiter ce cas à part.

Cas où X est compacte

Dans ce cas G est aussi compact et une théorème de structure assure qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes finis de G ayant un cardinal donné [9, p. 132]. Comme deux variétés isospectrales ont même volume, si Γ est dans $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$, alors Γ et Γ_0 ont même cardinal et la proposition est démontrée. On obtient donc que $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$ est une réunion finie de classes de conjugaison dans G de sous-groupes ayant même cardinal que Γ_0, ce qui veut dire que dans ce cas le spectre du laplacien détermine un nombre fini de classes d'isométries de variétés du type $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$ où Γ est sous-groupe discret de G. Comme nous le verrons plus loin, ce résultat n'est en général pas vrai si la variété X n'est pas compacte.

Remarquons que l'on ne peut, en général, obtenir un meilleur résultat, c'est-à-dire que, en général, $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$ n'est pas réduit à une seule classe de conjugaison. Pour voir cela, il suffit de prendre la sphère S^n munie de sa métrique canonique, $G = \mathrm{SO}(n+1)$ et de choisir pour Γ_0 un des nombreux groupes construits par Ikeda [10] donnant lieu à des exemples d'espaces lenticulaires isospectraux et non isométriques.

Cas où X est non compacte

Les arguments utilisés ne sont plus du tout les mêmes. Nous allons maintenant avoir besoin du critère de Mahler. Nous avons donc besoin de trouver un voisinage U de l'élément neutre e de G tel que pour tout Γ dans $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$, on ait $\Gamma \cap U = \{e\}$. Pour cela, si g est dans G, on pose $l(g) = \inf_{x\in X} d(x, g.x)$ et si Γ est dans $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$, on pose $l_0(\Gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma-\{e\}} l(\gamma)$. D'un point de vue géométrique, si γ est dans Γ, alors $l(\gamma)$ est la longueur de la plus petite géodésique périodique de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$ qui est dans la classe d'homotopie libre correspondant à la classe de conjugaison de γ dans Γ et $l_0(\Gamma)$ est la longueur de la plus petite géodésique périodique de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$ qui n'est pas homotopiquement triviale. Le résultat qui va nous permettre d'utiliser le critère de Mahler est le suivant:

LEMME 6. *Pour tout* Γ *dans* $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$, *alors* $l_0(\Gamma) = l_0(\Gamma_0)$.

Preuve. On va utiliser la formule de trace de D. DeTurck et C. Gordon et des estimées sur le noyau de la chaleur. Tout d'abord, si l'on note $k(x, y, t)$ où x, y sont dans X et $t > 0$ le noyau de la chaleur de $(X, \mathbf{m})$, alors le noyau de la chaleur de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$ est donné par [11]: $k_\Gamma(x, y, t) = \sum_{\gamma\in\Gamma} k(x, \gamma.y, t)$. D'autre part, il est bien connu que, pour tout $t > 0$, l'opérateur $\exp(-t\Delta_{\mathbf{m}_\Gamma})$ est à trace et que si l'on note $Z_\Gamma(t)$ la trace de cet opérateur, alors les variétés $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$ et $(\Gamma_0\backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_0})$ sont isospectrales si et seulement si les fonctions Z_Γ et Z_{Γ_0} sont égales. Le but de la formule de trace de D. DeTurck et C. Gordon est d'exprimer fonction Z_Γ en fonction du noyau de la chaleur de $(X, \mathbf{m})$.

Pour énoncer cette formule nous avons besoin de fixer quelques notations. Si γ est dans Γ, on notera Γ_γ le centralisateur de γ dans Γ, $[\gamma]_\Gamma$ sa classe de conjugaison, $[\Gamma]$ l'ensemble des classes de conjugaison et $v_{\mathbf{m}_{\Gamma_\gamma}}$ la mesure riemannienne associée à la métrique $\mathbf{m}_{\Gamma_\gamma}$ induite par $\mathbf{m}$ sur $\Gamma_\gamma \backslash X$. On peut maintenant énoncer la formule désirée [3, p. 1069]. Pour tout $t > 0$, on a:

$$Z_\Gamma(t) = \sum_{[\gamma] \in [\Gamma]} \int_{\Gamma_\gamma \backslash X} k(x, \gamma . x, t) \, dv_{\mathbf{m}_{\Gamma_\gamma}}(x).$$

On observe maintenant que le terme de cette somme correspondant à l'élément neutre est égal à [3, p. 1072]:

$$\int_{\Gamma \backslash X} k(x, x, t) \, dv_{\mathbf{m}_\Gamma}(x) = \rho_\Gamma(\Gamma \backslash G) \int_{G \backslash X} k(x, x, t) \, d\rho_G(x)$$

où ρ_G et ρ_Γ sont les mesures naturelles sur $G \backslash X$ et $\Gamma \backslash X$ construites de la manière indiquée au début de la première partie, une mesure de Haar sur G ayant été fixée une fois pour toutes. Comme, $\rho_\Gamma(\Gamma \backslash G) = v_{\mathbf{m}_\Gamma}(\Gamma \backslash X)/\rho_G(G \backslash X)$, ce terme ne fait intervenir le groupe Γ que par l'intermédiaire de $v_{\mathbf{m}_\Gamma}(\Gamma \backslash X)$. On utilise maintenant le fait que deux variétés isospectrales ont même volume et on obtient que, en posant

$$W_\Gamma(t) = Z_\Gamma(t) - \int_{\Gamma \backslash X} k(x, x, t) \, dv_{\mathbf{m}_\Gamma}(x),$$

si Γ est dans $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$, alors $W_\Gamma = W_{\Gamma_0}$. La fin de la preuve du lemme consiste à montrer que, si l'on pose $n = \dim X$, alors

$$l_0(\Gamma) = \sup \left\{ l > 0 \,\middle|\, \lim_{t \to 0^+} t^{n/2} \exp(l^2/4t) W_\Gamma(t) = 0 \right\}.$$

Nous allons tout d'abord montrer que pour tout $l < l_0(\Gamma)$, on a $\lim_{t \to 0^+} t^{n/2} \exp(l^2/4t) W_\Gamma(t) = 0$. Pour cela, on utilise le fait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout t dans $[0, 1]$ et x, y dans X, on ait [11]: $0 < k(x, y, t) < Ct^{-n/2} \exp(-d^2(x, y)/4t)$. On en déduit que pour tout t dans $[0, 1]$, on a:

$$W_\Gamma(t) \leqslant Ct^{-n/2} \sum_{[\gamma] \in [\Gamma], \gamma \neq e} \int_{\Gamma_\gamma \backslash X} \exp(-d^2(x, \gamma . x)/4t) \, dv_{\mathbf{m}_{\Gamma_\gamma}}(x).$$

Fixons maintenant un nombre α dans $]0, 1[$ et posons $l_0(\Gamma) = l_0$. Alors, pour tout x dans X et γ dans $\Gamma - \{0\}$, on a: $d^2(x, \gamma . x) \geqslant \alpha l_0^2 + (1 - \alpha) d^2(x, \gamma . x)$. On obtient donc:

$$W_\Gamma(t) \leqslant C e^{-\alpha l_0^2/4t} t^{-n/2} \sum_{[\gamma] \in [\Gamma], \gamma \neq e} \int_{\Gamma_\gamma \backslash X} \exp(-(1 - \alpha) d^2(x, \gamma . x)/4t) \, dv_{\mathbf{m}_{\Gamma_\gamma}}(x).$$

Pour tout nombre $s > 0$, on définit sur une fonction φ_s en posant

$$\varphi_s(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-d^2(x, \gamma . x)/4s).$$

En utilisant les mêmes arguments que dans [11, p. 491], on montre que cette série est convergente et que φ_s est une fonction continue sur X qui est invariante par Γ (on notera encore φ_s la fonction induite sur $\Gamma \backslash X$). On vient donc le montrer que pour tout t dans $[0, 1]$, on a:

$$W_\Gamma(t) \leqslant C \exp(-\alpha l_0^2/4t) t^{-n/2} \left(\int_{\Gamma \backslash X} \varphi_{t/(1-\alpha)}(x) dv_{\mathbf{m}_\Gamma}(x) - v_{\mathbf{m}_\Gamma}(\Gamma \backslash X) \right).$$

On remarque maintenant que quand t tend vers 0^+ en décroissant, la suite de fonctions $\varphi_{t/(1-\alpha)}$ converge en décroissant vers la fonction constante égale à 1. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient que pour tout α dans $]0,1[$, on a $\lim_{t\to 0^+} t^{n/2}\exp(\alpha l_0^2/4t)W_\Gamma(t)=0$, ce qui est bien le résultat annoncé.

Il reste à montrer que pour $l>l_0(\Gamma)$, on a $\liminf_{t\to 0^+} t^{n/2}\exp(l^2/4t)W_\Gamma(t)>0$. Pour cela, on utilise une minoration du noyau de la chaleur obtenue par Cheeger et Yau. On remarque que $r_0=\min_{u\in UX} Ricc(u,u)$ est fini car $(X,\mathbf{m})$ admet un quotient compact (UX désigne le fibré unitaire de $(X,\mathbf{m})$) et on obtient [12, p. 477] que pour tout $t>0$ et tout x,y dans X, on a $k(x,y,t)\geqslant k_{r_0}(d(x,y),t)$ où k_{r_0} est le noyau de la chaleur de l'espace simplement connexe à courbure constante dont la courbure de Ricci est r_0 (comme un tel espace étant deux-points homogène, le noyau de la chaleur ne dépend que de la distance). Choisissons maintenant γ_0 dans Γ tel que $l(\gamma_0)=l_0(\Gamma)$. Comme le noyau de la chaleur est positif, on obtient:

$$W_\Gamma(t)\geqslant\int_{\Gamma_{\gamma_0}\backslash X} k_{r_0}(d(x,\gamma_0\,.\,x),t)\,\mathrm{d}v_{\mathbf{m}_{\Gamma_{\gamma_0}}}(x).$$

Fixons maintenant $l>l_0$ et notons U la projection sur $\Gamma_{\gamma_0}\backslash X$ de l'ensemble des x dans X tels que $d(x,\gamma_0\,.\,x)<l$. Comme k_{r_0} est une fonction décroissante de la distance [12, p. 474], on obtient: $W_\Gamma(t)\geqslant k_{r_0}(l,t)v_{\mathbf{m}_{\Gamma_{\gamma_0}}}(U)$. Remarquons que, U étant un ouvert relativement compact, $v_{\mathbf{m}_{\Gamma_{\gamma_0}}}(U)$ est non nul et fini et, pour montrer le résultat, il suffit de vérifier que $\lim_{t\to 0^+} t^{n/2}\exp(l^2/4t)k_{r_0}(l,t)>0$. Remarquons tout d'abord que $r_0\leqslant 0$, sinon, d'aprés le théorème de Meyers, X serait compacte. Si $r_0=0$, la limite précédente est égale à $(4\pi)^{-n/2}$ et si $r_0<0$, elle égale à $(4\pi)^{-n/2}al/sh(al)$ avec $a=((1-n)r_0)^{1/2}$ [13, p. 409]. On a donc bien montré que si $l>l_0(\Gamma)$, alors $\liminf_{t\to 0^+} t^{n/2}\exp(l^2/4t)W_\Gamma(t)>0$. Le lemme est donc démontré. □

D'aprés le lemme précédent, si γ est un élément de $\Gamma-\{e\}$ où Γ est dans $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$, alors pour tout x dans X, on a $d(x,\gamma\,.\,x)\geqslant l_0(\Gamma_0)$. Il existe donc un ouvert U de G contenant l'élément neutre e tel que pour tout Γ dans $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$, on ait $U\cap\Gamma=\{e\}$. Soit $\{\Gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$. D'aprés ce que l'on vient de voir, on peut appliquer le critère de Mahler. Il existe donc un sous-groupe discret Γ et une sous-suite que l'on notera encore $\{\Gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ qui converge vers Γ. Il nous faut maintenant montrer que Γ est dans $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$.

Le premier point consiste à montrer que $\Gamma\backslash X$ est une variété compacte. Remarquons tout d'abord que l'action de Γ est libre. En effet, supposons qu'un élément γ de $\Gamma-\{e\}$ admette un point fixe x. Comme γ est la limite d'une suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ où γ_n appartient à $\Gamma_n-\{e\}$, on aurait $l(\gamma_n)\leqslant d(x,\gamma_n\,.\,x)$ et, le membre de droite tendant vers 0, on aurait une contradiction avec le lemme précédent. Il reste à montrer que $\Gamma\backslash X$ est compact. Pour cela, nous allons montrer:

LEMME 7. *Il existe une constante $D>0$ telle que pour tout Γ dans $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$, on ait $diam(\Gamma\backslash X,\mathbf{m}_\Gamma)\leqslant D$.*

Preuve. Fixons deux points x et y de $\Gamma\backslash X$ tels que $d(x,y)=diam(\Gamma\backslash X,\mathbf{m}_\Gamma)$ et choissons une géodésique minimisante c paramétrée par longueur d'arc telle que $c(0)=x$ et $c(d(x,y))=y$. On pose $\alpha=l_0(\Gamma_0)/4=l_0(\Gamma)/4$ et on remarque qu'il existe un nombre $v>0$ tel que pour tout Γ dans $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$ et pour tout z dans $\Gamma\backslash X$, on ait $v_{\mathbf{m}}(B(z,\alpha))\geqslant v$. Ceci est une conséquence directe du fait que l'application $z\mapsto v_{\mathbf{m}}(B(z,\alpha))$ est continue sur $\Gamma\backslash X$ et strictement positive. Le nombre $v_\Gamma=\inf_{z\in\Gamma\backslash X} v_{\mathbf{m}}(B(z,\alpha))$ est donc stricement positif. Pour voir que v_Γ est indépendant de Γ, on remarque que si un point x de X se projette sur un point z de $\Gamma\backslash X$, alors les boules $B(x,\alpha)$ et $B(z,\alpha)$ sont isométriques et ont donc même volume. On en déduit que $v_\Gamma=\inf_{x\in X} v_{\mathbf{m}}(B(z,\alpha))=v$ et ce pour tout Γ dans $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$. On appelle maintenant N la partie entière de $d(x,y)/2\alpha$. Alors les boules $B(c(2i\alpha),\alpha)$ sont deux-à-deux disjointes quand i parcourt $\{0,\dots,N\}$, puisque c est une géodésique minimisante. On en déduit que $d(x,y)v/(2\alpha) \leqslant (N+1)v \leqslant v_{\mathbf{m}}(\Gamma\backslash X) = v_{\mathbf{m}}(\Gamma_0\backslash X)$. Si on pose $D = 2\alpha v_{\mathbf{m}}(\Gamma_0\backslash X)/v$, pour tout Γ dans $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$, on a $diam(\Gamma\backslash X,\mathbf{m}_\Gamma) \leqslant D$. □

Fixons un point x dans X, alors la projection de la boule fermée $B(x,D)$ dans $\Gamma_n\backslash X$ est surjective, et ce pour tout n. En effet, si $\bar{x}$ désigne la projection de x dans $\Gamma_n\backslash X$ et si $\bar{y}$ est un point de $\Gamma_n\backslash X$, alors l'extrémité de la relevée partant de x d'une géodésique minimisante entre $\bar{x}$ et $\bar{y}$ est un point de $B(x,D)$ qui se projette sur $\bar{y}$. On en déduit que pour tout n, on a: $X = \bigcup_{\gamma_n\in\Gamma_n}\gamma_n . B(x,D)$. Si y est dans X, l'ensemble $K = \{g\in G \mid y\in g.B(x,D)\}$ est compact, puisque l'action de G est propre, et il existe un élément γ_n dans $\Gamma_n\cap K$, et ce pour tout n. On peut alors extraire un sous-suite de la suite $\{\gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ qui converge vers un élément γ de Γ et on obtient que y est dans $\gamma . B(x,D)$. On a donc montré que $X = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma . B(x,D)$, ce qui assure la compacité de $\Gamma\backslash X$.

Pour terminer la preuve de la proposition, il reste à montrer que le spectre de $(\Gamma\backslash X,\mathbf{m}_\Gamma)$ est le même que celui de $(\Gamma_n\backslash X,\mathbf{m}_{\Gamma_n})$. Pour cela, on utilise la partie (c) du Lemme 3 de la première partie. Il existe une suite θ_n de difféomorphismes de X qui converge vers l'identité pour la topologie C^∞ telle que $\Gamma_n = \theta_n\Gamma\theta_n^{-1}$. Il est immédiat que θ_n induit un difféomorphisme, que l'on notera encore θ_n, entre $\Gamma\backslash X$ et $\Gamma_n\backslash X$. On remarque maintenant que $(\Gamma_n\backslash X,\mathbf{m}_{\Gamma_n})$ et $(\Gamma\backslash X,\theta_n^*\mathbf{m}_{\Gamma_n})$ sont isométriques. Le résultat annoncé découle du fait que la suite de métriques $\theta_n^*\mathbf{m}_{\Gamma_n}$ converge vers $\mathbf{m}_\Gamma$ et de la continuité des valeurs propres par rapport à la métrique.

Le fait qu'il n'existe qu'un nombre fini de type de difféomorphisme pour les variétés $\Gamma\backslash X$ quand Γ parcourt $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$ est une conséquence directe de la compacité de $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$ et du Lemme 3 de la partie 2.

La proposition est maintenant démontrée. □

Remarque 8. (a) On vérifie facilement que l'ensemble des variétés $(\Gamma\backslash X,\mathbf{m}_\Gamma)$ quand Γ parcourt $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$ est compact pour la topologie C^∞.

(b) On ne peut en général obtenir un résultat plus précis que celui que l'on vient de montrer. En effet, on vérifie facilement que l'ensemble $\mathscr{I}som(\Gamma_0)$ des sous-groupes discrets Γ de G tels $(\Gamma\backslash X,\mathbf{m}_\Gamma)$ et $(\Gamma_0\backslash X,\mathbf{m}_{\Gamma_0})$ sont isométriques est une partie compacte de $\mathscr{M}_G$ et on pourrait espérer que $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$ soit une réunion finie de telles parties, c'est-à-dire que le spectre détermine un nombre fini de classes d'isométries. Il est déja connu que ceci est vrai dans certains cas (tores plats, surfaces de Riemann, variétés de Heisenberg, voir [14] pour des références) mais n'est pas vrai en général. Pour voir cela, on considère un groupe de Lie R résoluble, simplement connexe, de type exponentiel (par exemple un groupe nilpotent simplement connexe) et admettant un sous groupe discret et co-compact Γ. Si on munit R d'une métrique invariante à gauche $\mathbf{m}$, alors R opère alors sur lui-même par translations à gauche comme un groupe d'isométries. Gordon et Wilson introduisent [3, 15] le groupe $AIA(R;\Gamma)$ des automorphismes presque intérieurs relativement à Γ qu'ils définissent comme étant l'ensemble des automorphismes de R qui laissent stables les classes de conjugaison dans R des éléments de Γ. Ils montrent que $AIA(R;\Gamma)$ est un groupe de Lie qui contient le groupe $Int(R)$ des automorphismes intérieurs et que si $dim(AIA(R;\Gamma)) > dim(Int(R))$ et si $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un sous-groupe à un paramètre de $AIA(R;\Gamma)$ qui n'est pas contenu dans $Int(R)$, alors les groupes $\Gamma_t = \varphi_t(\Gamma)$ sont tels que les variétés $(\Gamma_t\backslash X,\mathbf{m}_{\Gamma_t})$ ont toutes le même spectre et, pour t assez petit, ne sont pas deux-à-deux isométriques. On voit donc que dans ce cas l'ensemble $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$ est compact et contient des groupes qui donnent lieu à une infinité non dénombrable de classes d'isométries. Pour terminer, remarquons que le résultat que l'on vient de prouver donne une nouvelle preuve du fait que les exemples de déformations isospectrales fournis par Gordon et Wilson donnent lieu à un ensemble compact de classes d'isométries [3, p. 1080].

Pour terminer cette partie, nous allons nous intéresser de manière plus précise à la topologie des ensembles $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$. Pour cela nous aurons besoin d'une hypothèse d'analycité. Tout d'abord, rappelons que tout groupe de Lie réel est en fait un groupe analytique. Maintenant, si Γ est un sous-groupe discret et co-compact d'un groupe de Lie G, on munit l'ensemble $\mathscr{R}(\Gamma, G)$ des morphismes de Γ dans G de la topologie de la convergence simple puis d'une structure d'ensemble analytique. Pour cela, on choisit un ensemble fini $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ de générateurs de Γ et on identifie $\mathscr{R}(\Gamma, G)$ à un sous-ensemble analytique de G^n par l'application: $\rho \mapsto (\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_n))$. Dans de nombreux cas, on peut choisir un système de générateurs tel que la composante connexe de l'inclusion de Γ dans G, que l'on notera par la suite $\mathscr{R}_0(\Gamma, G)$, soit non seulement un sous-ensemble analytique mais une sous-variété analytique. C'est ce que se passe lorsque G est compact, nilpotent et simplement connexe, semi-simple sans facteur compact [16] ou, plus généralement, si le quotient de G par son radical est un groupe semi-simple sans facteur compact [8, p. 104]. On peut maintenant énoncer le résultat désiré:

PROPOSITION 9. *Soit G un sous-groupe du groupe des isométries d'une variété riemannienne analytique $(X, \mathbf{m})$ tel que l'action de G sur X soit analytique. On suppose que G a un nombre fini de composantes connexes et que pour tout sous-groupe discret et co-compact Γ de G, $\mathscr{R}_0(\Gamma, G)$ est une variété analytique. Alors l'ensemble $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$ des sous-groupes discrets Γ de G tels $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$ soit une variété compacte qui ait même spectre du laplacien que $(\Gamma_0\backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_0})$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes par arcs.*

Preuve. Supposons qu'il existe dans $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$ une suite infinie $\{\Gamma_n\}_{n \geqslant 1}$ de groupes dans des composantes connexes par arc de $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$ deux à deux distinctes. D'aprés ce que l'on a vu dans la proposition précédente, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $\{\Gamma_n\}_{n \geqslant 1}$ converge vers un élément Γ de $\mathscr{I}sos(\Gamma_0)$. Il existe alors un isomorphisme ρ_n de Γ vers Γ_n tel que pour tout γ dans Γ, on ait: $\lim_{n\to+\infty} \rho_n(\gamma) = \gamma$. La suite $\{\rho_n\}_{n \geqslant 1}$ convergeant vers l'inclusion de Γ dans G, les isomorphismes ρ_n appartiennent, pour n assez grand, à $\mathscr{R}_0(\Gamma, G)$ puisque $\mathscr{R}(\Gamma, G)$ est, comme tout ensemble analytique, localement connexe par arc. On considère maintenant un voisinage U de l'inclusion de Γ dans G analytiquement équivalent à un cube et on construit, quitte à réduire U, un difféomorphisme F_u de X tel que, si l'on pose $\Gamma_u = u(\Gamma)$, on ait $\Gamma_u = F_u \Gamma F_u^{-1}$ et tel l'application $U \times X$ dans X qui envoie (u, x) sur $F_u(x)$ soit analytique. Pour cela, on reprend la preuve de [6, p. 383] ou [7, p. 59] et on utilise le fait que le flot d'un champs de vecteurs analytique est analytique. On remarque maintenant que les variétés $(\Gamma_u\backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_u})$ et $(\Gamma\backslash X, F_u^* \mathbf{m}_{\Gamma_0})$ sont isométriques et que l'application $u \mapsto F_u^* \mathbf{m}_{\Gamma_0}$ est analytique. On peut maintenant appliquer le généralisation du théorème de Buser et Courtois due à Dai et Wei: si on choisit un ouvert relativement compact V inclus dans U, alors il existe un entier N tel que si v est dans V et si les N premières valeurs propres de $(\Gamma_v\backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_v})$ et de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$ sont les mêmes, alors les deux variétés sont isospectrales [17]. On note maintenant $\{\lambda_n(u)\}_{n \geqslant 0}$ la suite des valeurs propres de $(\Gamma_u\backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_u})$ et on pose $\Gamma = \Gamma_0$. Si M désigne le plus petit entier tel que $\lambda_{M+1}(0) > \lambda_N(0)$ et si L est un nombre tel que $\lambda_{M+1}(0) > L > \lambda_M(0)$, alors il existe un voisinage ouvert W de 0 contenu dans V tel que pour w dans W, on ait $\lambda_{M+1}(w) > L > \lambda_M(w)$ et que pour toute fonction symétrique s de $M+1$ variables, l'application $w \mapsto s(\lambda_0(w), \dots, \lambda_M(w))$ soit analytique sur W. On en déduit que $\mathscr{I}sos(\Gamma_0) \cap \{\Gamma_w; w \in W\}$ est un ensemble analytique et est donc localement connexe par arcs.

Comme les sous-groupes Γ_n sont dans ce voisinage de Γ pour n assez grand, ils appartiennent à la même composantes connexe par arcs que Γ dans $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$. On a donc une contradiction avec l'hypothèse de départ, ce qui montre que $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes par arcs. $\square$

Ce résultat s'applique principalement lorsque $X = G/K$ est une variété riemannienne homogène pour G. Les composantes connexes par arcs de $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$ étant ouvertes, si un élément Γ de $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$ est proche Γ_0, il existe une déformation isospectrales qui joint Γ_0 et Γ. Le probléme est donc réduit, au moins localement, à classifier les déformations isospectrales. Il est raisonnable de penser que les seules déformations de réseaux qui donnent lieu à des variétés isospectrales sont celles qui ont été construites par Gordon et Wilson. Cette classification des déformations isospectrales a été obtenue dans un cas particulier dans [18]. On obtient alors:

COROLLAIRE 10. *Soit N un groupe de Lie simplement connexe et nilpotent de rang deux muni d'une métrique invariante à gauche* $\mathbf{m}$ *et Γ_0 un sous-groupe discret et co-compact de N, alors l'ensemble $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$ a un nombre fini de composantes connexes par arcs. De plus, la composante connexe par arcs d'un élément Γ de $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$ est l'ensemble des $\varphi\circ\psi(\Gamma)$ quand ψ parcourt l'ensemble $AIA(N;\Gamma)$ des automorphismes presque intérieurs relativement à Γ et φ parcourt le groupe $I_{\mathbf{m}}$ des automorphismes de N qui sont des isométries de $(N,\mathbf{m})$.*

4. CAS DES GROUPES SEMI-SIMPLES

Comme nous venons de le voir, le spectre du laplacien détermine, dans une classe d'isométrie locale, un ensemble compact de classes d'isométrie et on peut se demander sous quelle hypothèse ce résultat peut étre amélioré. Les déformations construites par Gordon et Wilson montrent que l'on ne peut espérer obtenir de meilleur résultat d'ordre général si l'on n'exclut pas les groupes résolubles. On est donc amené tout naturellement à considérer les groupes de Lie semi-simples, puisque, par définition, ceux-ci n'admettent pas de sous-groupe distingué, connexe et résoluble non trivial. Nous pouvons maintenant énoncer:

PROPOSITION 11. *Soient $(X,\mathbf{m})$ une variété riemannienne et G un sous-groupe fermé et connexe du groupe des isométries de $(X,\mathbf{m})$. On suppose que G est semi-simple, n'a aucun facteur compact ou localement isomorphe à $SL(2,\mathbb{R})$. Soit Γ_0 un groupe discret contenu dans G tel que $\Gamma_0\backslash X$ soit une variété compacte. Alors, il existe N sous-groupes $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_N$ tels que $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$ soit l'ensemble des sous-groupes discrets de G qui sont conjugués dans G à l'un des Γ_i pour $0\leqslant i\leqslant N$. En particulier, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isométrie pour les variétés $(\Gamma\backslash X,\mathbf{m}_\Gamma)$ quand Γ parcourt $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe dans $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$ une suite infinie $\{\Gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ de groupes non deux-à-deux conjugués dans G. D'aprés ce que l'on a vu dans la partie précédente, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $\{\Gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ converge vers un élément Γ de $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$. On veut maintenant appliquer le théorème de rigidité de Mostow. Pour cela, on est obligé d'introduire le groupe $\bar{G}$ qui est le quotient de G par son centre C. Remarquons que C est un groupe fini. On note alors $\overline{\Gamma_n}$ et $\bar{\Gamma}$ les projections respectives de Γ_n et Γ dans $\bar{G}$. Il est immédiat que ces groupes sont des sous-groupes discrets et co-compact de $\bar{G}$ et que la suite $\{\overline{\Gamma_n}\}_{n\geqslant 1}$ converge vers $\bar{\Gamma}$. Donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe un isomorphisme θ_n de $\bar{\Gamma}$ vers $\overline{\Gamma_n}$ tel que pour tout γ dans Γ, on ait: $\lim_{n\to+\infty}\theta_n(\gamma)=\gamma$

[5]. D'aprés le théorème de Mostow [19, p. 187], ces isomorphismes s'étendent de manière unique en des isomorphismes de $\bar{G}$ que l'on note encore θ_n. Comme la suite $\{\theta_n\}_{n\geqslant 1}$ converge vers l'identité, les éléments de cette suite apartiennent, à partir d'un certain rang, à la composante neutre de $Aut(\bar{G})$ qui est le groupe des automorphismes intérieurs. Donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les groupes $\overline{\Gamma_n}$ sont tous de la forme $\overline{\Gamma_n} = \overline{g_n}^{-1}\bar{\Gamma}\overline{g_n}$ où $\overline{g_n}$ est la projection dans $\bar{G}$ d'un élément g_n de G. Remarquons maintenant que g_n n'est bien définit que modulo Γ et que, $\Gamma\backslash G$ étant compact, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que la suite $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ est convergente. On en déduit que la suite $\{g_n\Gamma_n g_n^{-1}\}_{n\geqslant 1}$ est convergente. Comme tous ces groupes sont des sous-groupes du groupe discret $C\Gamma$, qui est l'image réciproque de $\bar{\Gamma}$ dans G, cette suite est constante à partir d'un certain rang, ce qui contredit le fait que les groupes considérés ne sont pas conjugués dans G. □

Remarque 12. Le résultat obtenu dans la proposition précédente ne peut être amélioré dans le sens suivant: on ne peut pas espérer montrer que l'ensemble $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$ se réduit à l'ensemble des sous-groupes conjugués avec Γ_0. En effet, Spatzier a montré que pour une grande classe de groupes semi-simples (voir [20] pour un énoncé précis), on a la propriété suivante: si Γ est un sous-groupe discret et co-compact de G, alors il existe deux sous-groupes Γ_1 et Γ_2 d'indice fini dans Γ qui ne sont pas conjugués dans G et tels que les représentations de G induites par les représentations triviales de Γ_1 et Γ_2 sont équivalentes. On en déduit en utilisant le théorème de Sunada [21] que les variétés $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_1})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_2})$ sont isospectrales et en général non isométriques. Notons que de tels exemples ont aussi été construits par Vignéras [22] dans le cas de $G = PSL(2,\mathbb{R})^r \times PSL(2,\mathbb{C})^s$.

Nous avons malheureusement été obligés dans la proposition précédente d'exclure le cas le cas où le groupe semi-simple G admet un facteur localement isomorphe à $SL(2,\mathbb{R})$. Nous allons voir que l'on peut se passer de cette hypothèse si la variété sur laquelle le groupe G opère isométriquement est l'espace symétrique qui lui est naturellement associé. En effet, on a le résultat suivant:

PROPOSITION 13. *Soient $X = G/K$ un espace symétrique de type non compact simplement connexe et Γ_0 un sous-groupe discret du groupe G des isométries de X tel que $\Gamma_0\backslash X$ soit une variété compacte. Alors, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isométrie de variétés localement symétriques de la forme $\Gamma\backslash X$ quand Γ parcourt $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe une suite infinie $\{\Gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ de groupes non deux-à-deux conjugués dans G. D'aprés ce que l'on a vu dans la partie précédente, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $\{\Gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ converge vers un élément Γ de $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$. On sait que G est un produit de groupes simples et on écrit $G = G^{(0)} \times G^{(1)} \times \cdots \times G^{(p)}$ où les groupes $G^{(i)}$ pour $i \geqslant 1$ sont les facteurs isomorphes à $PSL(2,\mathbb{R})$ tels que la projection $\Gamma^{(i)}$ de Γ sur $G^{(i)}$ soit un groupe discret et $G^{(0)}$ est le produit des autres facteurs simples. D'aprés Weil [16, pp. 591, 592], la projection $\Gamma^{(i)}$ de Γ sur $G^{(i)}$ est un sous-groupe discret et co-compact de $G^{(i)}$, et ce pour $i \geqslant 0$, et Γ est un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma^{(0)} \times \Gamma^{(1)} \times \cdots \times \Gamma^{(p)}$. Finalement, les groupes Γ_n ont, pour n assez grand, les mêmes propriétés que Γ et, avec des notations évidentes, les suites $\{\Gamma_n^{(i)}\}_{n\geqslant 1}$ convergent vers $\Gamma^{(i)}$ et ce pour tout $i \geqslant 0$. En utilisant le théorème de Mostow et les mêmes arguments que dans la proposition précédente, on voit que, quitte à extraire une sous-suite et à changer Γ_n en $g_n^{-1}\Gamma_n g_n$ où $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente d'éléments de $G^{(0)}$, on peut supposer que pour tout n, on a $\Gamma_n^{(0)} = \Gamma^{(0)}$. On remarque maintenant que le spectre des variétés

$\Gamma^{(0)} \times \Gamma_n^{(1)} \times \cdots \times \Gamma_n^{(p)} \backslash X$ est contenu dans le spectre, que l'on va noter Σ, commun à toutes les variétés $\Gamma_n \backslash X$ et que donc, à fortiori, le spectre des surfaces de Riemann $\Gamma_n^{(i)} \backslash \mathbb{H}^2$ est lui aussi contenu dans Σ. En utilisant le fait que les surfaces $\Gamma_n^{(i)} \backslash \mathbb{H}^2$ convergent vers la surface $\Gamma^{(i)} \backslash \mathbb{H}^2$ lorsque $n \to +\infty$, on obtient que, si l'on note $\lambda_k(\Gamma_n^{(i)})$ la k-ième valeur propre de $\Gamma_n^{(i)} \backslash \mathbb{H}^2$, alors la suite $\{\lambda_k(\Gamma_n^{(i)})\}_{n \geqslant 1}$ est convergente et contenue dans l'ensemble discret Σ. On en déduit que pour tout $k \geqslant 0$ et $1 \leqslant i \leqslant p$, il existe une entier $N(i,k)$ tel que la suite $\{\lambda_k(\Gamma_n^{(i)})\}_{n \geqslant 1}$ soit constante à partir de $N(i,k)$. On remarque maintenant qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel toutes les surfaces $\Gamma_n^{(i)} \backslash \mathbb{H}^2$ aient un rayon d'injectivité plus grand que ε. On peut maintenant appliquer le résultat de Buser et Courtois [23]: il existe un entier n_ε tel que si les n_ε premières valeurs propres de deux surfaces de Riemann de rayon d'injectivité plus grand que ε sont les mêmes, alors ces deux surfaces sont isospectrales. On déduit de ce résultat qu'il existe un entier N tel que, si $m, n > N$, alors les surfaces $\Gamma_n^{(i)} \backslash \mathbb{H}^2$ et $\Gamma_m^{(i)} \backslash \mathbb{H}^2$ sont isospectrales et ce pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$. Comme le spectre du laplacien détermine un nombre fini de classes d'isométrie de surfaces de Riemann [23], quitte à extraire une sous-suite et à changer $\Gamma_n^{(i)}$ en $g_n^{-1} \Gamma_n^{(i)} g_n$ où $\{g_n\}_{n \geqslant 1}$ est une suite convergente d'éléments de $G^{(i)}$, on peut supposer que pour tout n, on a $\Gamma^{(0)} \times \Gamma_n^{(1)} \times \cdots \times \Gamma_n^{(p)} = \Gamma^{(0)} \times \Gamma^{(1)} \times \cdots \times \Gamma^{(p)}$. Il suffit de remarquer que les groupes Γ_n sont des sous-groupes du groupe discret $\Gamma^{(0)} \times \Gamma^{(1)} \times \cdots \times \Gamma^{(p)}$ et que la suite $\{\Gamma_n\}_{n \geqslant 1}$ ne peut donc qu'être constante à partir d'un certain rang. On aboutit donc à une contradiction. □

Remarque 14. Le résultat que l'on vient de montrer pour les espaces symétriques de type non compact l'est aussi pour les espaces symétriques de type compact, comme nous l'avons vu dans la première partie de la preuve de la proposition de la partie précédente et pour les variétes plates, comme l'a montré Sunada [24]. Le cas des espaces symétriques qui sont des produits des cas que l'on vient de citer reste un problème ouvert.

5. UN RÉSULTAT SUR LE SPECTRE DES LONGUEURS

Nous allons nous intéresser dans cette partie au spectre des longueurs. Bien que ce ne soit pas toujours la définition retenue, on définit le spectre des longueurs comme étant l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques qui ont une longueur minimale parmis toutes les courbes périodiques de leur classe d'homotopie libre, la multiplicité d'une longueur l étant égale au nombre de classes d'homotopie libre dont la plus petite géodésique périodique est de longueur l. On sait qu'il y a une bijection entre les classes d'homotopies libres d'une variété et les classes de conjugaison de son groupe fondamental et si l'on se place dans le cadre que l'on a considéré jusqu'à présent, c'est-à-dire si l'on écrit la variété sous la forme $(\Gamma \backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$ où X est maintenant supposée simplement connexe, alors le spectre des longueurs est l'ensemble des $l(\gamma)$ quand γ parcourt l'ensemble des classes de conjugaison de Γ (rappelons que $l(\gamma) = \inf_{x \in X} d(x, \gamma . x)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de γ).

Compte-tenu des relations qui existent entre le spectre du laplacien et le spectre des longueurs (voir [14] pour des références sur le sujet), on peut s'attendre à ce que le résultat de compacité concernant le spectre du laplacien soit encore vrai pour le spectre des longueurs. Le résultat obtenu dans le cas général est malheureusement plus faible:

PROPOSITION 15. *Soit Γ_0 un groupe discret contenu dans un sous-groupe G du groupe des isométries d'une variété riemannienne $(X, \mathbf{m})$ tel que $\Gamma_0 \backslash X$ soit une variété compacte. Alors, pour tout $C > 0$, l'ensemble $L - \mathscr{I}sos(\Gamma_0)^C$ des sous-groupes discrets Γ de G tels $(\Gamma \backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$*

soit une variété compacte de volume $\leqslant C$ *qui ait même spectre des longueurs que* $(\Gamma_0 \backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_0})$ *est une partie compacte de l'ensemble* $\mathcal{M}_G$ *des sous-groupes discrets de G. De plus, il n'existe qu'un nombre fini de type de difféomorphisme pour les variétés* $\Gamma \backslash X$ *quand* Γ *parcourt* $L - \mathcal{I}sos(\Gamma_0)^C$.

Preuve. Si Γ est un sous-groupe de G opérant librement sur X, on pose $l_0(\Gamma) = \inf_{\gamma \in \Gamma - \{e\}} l(\gamma)$. Si Γ est dans $L - \mathcal{I}sos(\Gamma_0)^C$, alors $l_0(\Gamma) = l_0(\Gamma_0)$ et il existe un ouvert U de G contenant l'élément neutre e tel que pour tout Γ dans $L - \mathcal{I}sos(\Gamma_0)^C$, on ait $U \cap \Gamma = \{e\}$. Considérons maintenant une suite $\{\Gamma_n\}_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $L - \mathcal{I}sos(\Gamma_0)^C$. On peut appliquer le critère de Mahler: il existe un sous-groupe discret Γ et une sous-suite que l'on notera encore $\{\Gamma_n\}_{n \geqslant 1}$ qui converge vers Γ. Il nous faut maintenant montrer que Γ est dans $L - \mathcal{I}sos(\Gamma_0)^C$.

Le principal problème est de montrer que $\Gamma \backslash X$ est une variété compacte. Pour cela, on reprend la fin de la preuve du résultat concernant le spectre du laplacien et on montre de la même manière que l'action de Γ est libre. Il nous faut maintenant montrer qu'il existe une constante $D > 0$ telle que pour tout Γ dans $L - \mathcal{I}sos(\Gamma_0)^C$, on ait $diam(\Gamma \backslash X, \mathbf{m}_\Gamma) \leqslant D$. Ceci est une conséquence directe de la preuve du Lemme 7 de la troisième partie et de la fin de la preuve de la Proposition 5.

Montrons maintenant que le spectre des longueurs de la variété limite $(\Gamma \backslash X, \mathbf{m}_\Gamma)$ est le même que celui de $(\Gamma_0 \backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_0})$. Pour cela, on raisonne de la même manière que pour le résultat concernant le spectre du laplacien. Il existe, pour n assez grand, une suite θ_n de difféomorphismes de X qui converge vers l'identité pour la topologie C^∞ telle que $\Gamma_n = \theta_n \Gamma \theta_n^{-1}$. Il est immédiat que θ_n induit un difféomorphisme, que l'on notera encore θ_n, entre $\Gamma \backslash X$ et $\Gamma_n \backslash X$. On remarque maintenant que $(\Gamma_n \backslash X, \mathbf{m}_{\Gamma_n})$ et $(\Gamma \backslash X, \theta_n^* \mathbf{m}_{\Gamma_n})$ sont isométriques. Le résultat annoncé découle du fait que la suite de métriques $\theta_n^* \mathbf{m}_{\Gamma_n}$ converge vers $\mathbf{m}_\Gamma$ et de la continuité par rapport à la métrique de la fonction qui associe à une classe d'homotopie libre $\mathcal{C}$ la longueur de la plus petite courbe appartenant à $\mathcal{C}$.

La proposition est maintenant démontrée. □

Pour avoir un résultat satisfaisant, il fraudrait pouvoir se passer de l'hypothèse sur le volume. Il arrive que ceci soit possible:

PROPOSITION 16. *Soient* $X = G/K$ *un espace symétrique de rang 1 de type non compact et* Γ_0 *un sous-groupe discret de G tel que* $\Gamma_0 \backslash X$ *soit une variété compacte. Alors l'ensemble* $L - \mathcal{I}sos(\Gamma_0)$ *des sous-groupes discrets* Γ *de G tels* $\Gamma \backslash X$ *soit une variété compacte localement symétrique qui ait même spectre des longueurs que* $\Gamma_0 \backslash X$ *est constitué d'un nombre fini de classes de conjugaison. En d'autres termes, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isométries de variétés localement symétriques de la forme* $\Gamma \backslash X$ *quand* Γ *parcourt* $L - \mathcal{I}sos(\Gamma_0)$.

Preuve. Si $dim(X) = 2$, ce résultat est deja connu puisque deux surfaces de Riemann compactes ont même spectre du Laplacien si et seulement si elles ont même spectre des longueurs. Dans le cas où $dim(X) \geqslant 3$, on peut les résultats de Deitmar et Juhl qui nous assurent que si Γ est dans $L - \mathcal{I}sos(\Gamma_0)$, alors $\Gamma_0 \backslash X$ et $\Gamma \backslash X$ ont même caractéristique d'Euler et donc même volume [25, 26] d'aprés la formule de Gauss-Bonnet. On en déduit en utilisant la proposition précédente que $L - \mathcal{I}sos(\Gamma_0)$ est une partie compacte de l'ensemble $\mathcal{M}_G$ des sous-groupes discrets de G. Comme G est un groupe simple non compact et non localement isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$, la preuve de la Proposition 11 de la partie 4 nous assure que $L - \mathcal{I}sos(\Gamma_0)$ est constitué d'un nombre fini de classes de conjugaison. La preuve est donc terminée. □

6. APPLICATION AUX REPRÉSENTATIONS

Nous allons maintenant appliquer le résultat de compacité portant sur les réseaux isospectraux au problème classique d'analyse harmonique qui consiste à étudier les représentations régulières. On considère un groupe de Lie connexe G et un sous-groupe Γ discret et co-compact de G. On définit alors une représentation de G, que l'on note π_Γ, dont l'espace est $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma\backslash G)$ et qui est définie comme suit: $(\pi_\Gamma(g)\varphi)(\bar{x}) = \varphi(\overline{xg})$ où φ est dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma\backslash G)$. $\bar{x}$ dans $\Gamma\backslash G$ et g dans G. La représentation ainsi obtenue est la représentation induite par la représentation triviale de Γ. On peut montrer que π_Γ est complètement réductible et interprétrer en fonction de Γ les multiplicités des représentations irréductibles de G dans π_Γ est un problème dur [27]. On vérifie facilement que deux groupes conjugués dans G induisent des représentations équivalentes et on peut se demander si cette condition est nécessaire. Ceci n'est en pas vrai en général et c'est en utilisant ce phénomène que Gordon et Wilson ont construits leurs déformations isospectrales. En effet, dans le cas où G est simplement connexe et résoluble de type exponentiel Gordon et Wilson [15, 3] montrent, en utilisant la théorie de Kirillov, que si φ est un élément du groupe $AIA(G;\Gamma)$ des automorphismes presque intérieurs, alors les représentations π_Γ et $\pi_{\varphi(\Gamma)}$ sont équivalentes. De plus, si $dim(AIA(G;\Gamma)) > dim(Int(G))$ et si $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un sous-groupe à un paramètre de $AIA(G;\Gamma)$ qui n'est pas contenu dans $Int(G)$, alors les groupes $\Gamma_t = \varphi_t(\Gamma)$ ne sont pas, pour t assez petit, deux à deux conjugués. On va obtenir cependant obtenir un résultat analogue à celui que l'on a obtenu dans l'étude des problèmes d'isospectralité. En effet, on a le résultat suivant:

PROPOSITION 17. *Soient G un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes et Γ_0 un sous-groupe et co-compact de G. Alors l'ensemble $\mathcal{R}ep(\Gamma_0)$ des sous-groupes Γ de G discrets, co-compacts et tels que les représentations π_Γ et π_{Γ_0} soient équivalentes est une partie compacte de l'ensemble $\mathcal{M}_G$ des sous-groupes discrets de G.*

Preuve. Fixons une métrique riemannienne $\mathbf{m}$ invariante à gauche sur G. Le groupe G opère alors sur lui-même par translations à gauche comme un groupe d'isométries et, d'aprés le théorème de Sunada [21], si Γ est dans $\mathcal{R}ep(\Gamma_0)$, alors les quotients riemanniens $(\Gamma_0\backslash G, \mathbf{m}_{\Gamma_0})$ et $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m}_\Gamma)$ sont isospectraux, donc $\mathcal{R}ep(\Gamma_0)$ est contenu dans $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$ qui est compact. Pour prouver le résultat, il suffit donc de montrer que $\mathcal{R}ep(\Gamma_0)$ est fermé dans $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$. Soit $\{\Gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{R}ep(\Gamma_0)$ qui converge vers un élément Γ de $\mathcal{I}sos(\Gamma_0)$ et montrons que Γ est dans $\mathcal{R}ep(\Gamma_0)$. Pour cela, si φ est une fonction de classe C^∞ et à support compact, on pose

$$\pi_\Gamma(\varphi) = \int_G \varphi(g)\pi_\Gamma(g)\,\mathrm{d}\mu_G(g)$$

où μ_G est une mesure de Haar sur G fixée une fois pour toutes. On peut montrer que l'opérateur $\pi_\Gamma(\varphi)$ ainsi défini est à trace et que les représentations π_Γ et π_{Γ_0} sont équivalentes si et seulement si pour toute fonction φ de classe C^∞ à support compact les opérateurs $\pi_\Gamma(\varphi)$ et $\pi_{\Gamma_0}(\varphi)$ ont même trace. De plus, cette trace se calcule [27]:

$$trace(\pi_\Gamma(\varphi)) = \int_{D_\Gamma}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi(u^{-1}\gamma u)\right)\mathrm{d}\mu_G(u)$$

où D_Γ est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur G. Fixons une fois pour toutes un point g_0 et choisissons les domaines fondamentaux $D_{\Gamma_n}(g_0)$ et $D_\Gamma(g_0)$ introduits dans la première partie. D'aprés la Proposition 1 de la deuxieme partie, il existe un compact W de G contenant $D_\Gamma(g_0)$ et tous les $D_{\Gamma_n}(g_0)$. Si l'on pose $K = W\,support(\varphi)W^{-1}$, alors K est compact et

$$trace(\pi_\Gamma(\varphi)) = \int_{D_\Gamma} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma \cap K} \varphi(u^{-1}\gamma u) \right) d\mu_G(u).$$

Comme la suite $\{\Gamma_n\}_{n \geqslant 1}$ converge vers Γ, il existe, pour n assez grand, un isomorphisme θ_n de Γ vers Γ_n tel que pour tout γ dans Γ, on ait: $\lim_{n \to +\infty} \theta_n(\gamma) = \gamma$. Fixons maintenant un voisinage ouvert et relativement compact U de K tel que $K \cap \Gamma = U \cap \Gamma$. Alors, si n assez grand, on a

$$\Gamma_n \cap U = \theta_n(\Gamma \cap K) \quad \text{et} \quad trace(\pi_{\Gamma_n}(\varphi)) = \int_{D_{\Gamma_n}} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma \cap K} \varphi(u^{-1}\theta_n(\gamma)u) \right) d\mu_G(u).$$

Comme la somme considérée est finie et que la fonction caractéristique de D_{Γ_n} converge presque partout vers celle de D_Γ, on peut appliquer sans problème le théorème de convergence dominée de Lebesgue et on obtient: $\lim_{n \to +\infty} trace(\pi_{\Gamma_n}(\varphi)) = trace(\pi_\Gamma(\varphi))$. On a donc bien montré que Γ est dans $\mathscr{R}ep(\Gamma_0)$, ce qui permet de conclure. □

Pour terminer cette partie nous allons décrire, dans certain cas, l'ensemble $\mathscr{R}ep(\Gamma_0)$ de manière plus précise. En effet, on a le résultat suivant:

COROLLAIRE 18. *Soient G un groupe de Lie simplement connexe et résoluble dont toutes les racines sont réelles et Γ_0 un sous-groupe discret et co-compact de G. Alors l'ensemble $\mathscr{R}ep(\Gamma_0)$ des sous-groupes Γ de G discrets, co-compacts et tels que les représentations π_Γ et π_{Γ_0} soient équivalentes n'a qu'un nombre fini de composantes connexes par arcs. De plus, la composante connexe par arcs d'un élément Γ de $\mathscr{R}ep(\Gamma_0)$ est l'ensemble des $\varphi(\Gamma)$ quand φ parcourt $AIA(G;\Gamma)$.*

Preuve. Supposons que $\mathscr{R}ep(\Gamma_0)$ ait une infinité de composantes connexes par arcs. On obtient ainsi une suite $\{\Gamma_n\}_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathscr{R}ep(\Gamma_0)$ dont tous les éléments appartiennent à des composantes connexes par arcs distinctes. D'aprés ce que l'on a vu, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que cette suite converge vers un élément Γ de $\mathscr{R}ep(\Gamma_0)$. Il existe donc, pour n assez grand, un isomorphisme θ_n de Γ vers Γ_n tel que pour tout γ dans Γ, on ait: $\lim_{n \to +\infty} \theta_n(\gamma) = \gamma$. Comme G n'a que des racines réelles, θ_n s'étend de manière unique en un isomorphisme de G que l'on notera encore θ_n (voir [28] pour des références). Remarquons que le groupe $Aut(G)$ des automorphismes de G admet une structure naturelle de groupe de Lie dont la topologie sous-jacente est la topologie compacte-ouverte. En utilisant les mêmes arguments que dans [28, preuve du Corollaire 3.1], on obtient que la suite $\{\theta_n\}_{n \geqslant 1}$ converge vers l'identité dans $Aut(G)$. On introduit maintenant l'ensemble $\mathscr{H}$ des automorphismes θ de G qui sont tels que $\theta(\Gamma_0)$ soit dans $\mathscr{R}ep(\Gamma_0)$. En utilisant le fait que, si φ est dans $Aut(G)$, alors les représentations $\pi_{\varphi(\Gamma_0)}$ et $\pi_{\Gamma_0} \circ \varphi^{-1}$ sont équivalentes, on vérifie facilement que $\mathscr{H}$ est un sous-groupe de $Aut(G)$. De plus, comme l'application $\varphi \mapsto \varphi(\Gamma_0)$ est continue et que $\mathscr{H}$ est l'image réciproque du compact $\mathscr{R}ep(\Gamma_0)$ par cette application, $\mathscr{H}$ est un sous-groupe fermé de $Aut(G)$. Comme tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est lui-même un groupe de Lie, on obtient que $\mathscr{H}$, étant une sous-variété de $Aut(G)$, est localement connexe par arcs. Comme la suite $\{\theta_n\}_{n \geqslant 1}$ converge vers l'identité, les éléments de cette suite sont, pour n assez grand, dans la même composante par arcs que l'identité. On a donc une contradiction avec l'hypothèse de départ. La description des composantes connexes par arcs que l'on a rappelée à la fin de la proposition est due à D. Schueth [28]. □

Une conséquence de ce résultat est que si pour tout sous-groupe Γ discret et co-compact de G on a $AIA(G;\Gamma) = Int(G)$, alors $\mathscr{R}ep(\Gamma_0)$ est une réunion finie de classes de conjugaisons.

On vérifie facilement que ceci est le cas si G est le groupe d'Heisenberg. Ce résultat est encore vrai pour une autre classe de groupes. En effet, on a le résultat suivant:

COROLLAIRE 19. *Soient G un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact et Γ_0 un sous-groupe discret et co-compact de G. Alors l'ensemble $\mathcal{R}ep(\Gamma_0)$ des sous-groupes Γ de G discrets, co-compacts et tels que les représentations π_Γ et π_{Γ_0} soient équivalentes est une réunion finie de classes de conjugaisons.*

Preuve. C'est une conséquence directe de la Proposition 13 de la partie 4 et du théorème de Sunada [21].

BIBLIOGRAPHIE

1. B. Osgood, R. Phillips and P. Sarnak: Compact isospectral sets of surfaces, *J. Functional Anal.* **80** (1988), 212–234.
2. R. Brooks, P. Perry and P. Petersen: Compactness and finiteness theorems for isospectral manifolds, *J. Reine Angew. Math.* **426** (1992), 67–89.
3. D. DeTurck and C. S. Gordon: Isospectral deformations II. Trace Formulas, metrics and potentials, *Comm. Pure Appl. Math.* **42** (1989), 1067–1095.
4. C. Chabauty: Limite d'ensemble et géométrie des nombres, *Bull. Soc. Math. France* **78** (1950), 143–151.
5. A. M. Macbeath: Groups of homeomorphisms of a simply connected space, *Ann. Math.* **79** (1964), 473–488.
6. A. Weil: On discrete subgroups of Lie groups, *Ann. Math.* **72** (1960), 369–384.
7. J. L. Koszul: Lectures on groups of transformations, Tata Institute, Lectures on mathematics and physics, 1965.
8. M. S. Raghunathan: Discrete subgroups of Lie groups, Springer, Berlin, 1973.
9. N. Bourbaki: *Elements de mathématique: groupes et algèbres de Lie, chapitre 9*, Masson, Paris, 1982.
10. A. Ikeda: Riemannian manifolds p-isospectral but not $(p+1)$-isospectral, in Geometry of manifolds (Matsumoto), *Perspect. Math.* **8** (1988), 383–417.
11. H. Donnelly: Asymptotic expansions for compact quotients of properly discontinuous group actions, *Illinois J. Math.* **23** (1979), 485–496.
12. J. Cheeger and S. T. Yau: A lower bound for the heat kernel, *Comm. Pure Appl. Math.* **40** (1981), 465–480.
13. A. Debiard, B. Gaveau and E. Mazet: Théorèmes de comparaison en géométrie riemannienne, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **12** (1976), 391–425.
14. P. Bérard: Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques, *Astérisque*, **177–178** (1989), 127–154.
15. C. S. Gordon and E. Wilson: Isospectral deformations of compact solv-manifolds, *J. Diff. Geom.* **19** (1984), 241–256.
16. A. Weil: On discrete subgroups of Lie groups (II), *Ann. Math.* **75** (1962), 578–602.
17. X. Dai and G. Wei: Finite part of spectrum and isospectrality, *Contemp. Math.* **173** (1994), 99–107.
18. H. Ouyang and H. Pesce: Déformations isospectrales sur les nilvariétés de rang deux, *C. R. Acad. Sci. Paris* **314** (1992), 621–623.
19. G. D. Mostow: Strong rigidity of locally symmetric spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, 1973.
20. R. J. Spatzier: On isospectral locally symmetric spaces and a theorem of Von Neumann, *Duke Math. J.* **59** (1989), 289–294.
21. T. Sunada: Riemannian covering and isospectral manifolds, *Ann. Math.* **121** (1985), 169–186.
22. M.F. Vignéras: Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques, *Ann. Math.* **112** (1980), 21–32.
23. P. Buser and G. Courtois: Finite parts of the spectrum of a Riemann surface, *Math. Ann.* **287** (1990), 523–530.
24. T. Sunada: Spectrum of a compact flat manifold, *Comment. Math. Helvetici* **53** (1978), 613–621.
25. A. Deitmar: The Selberg Trace formula and the Ruelle Zeta function for compact hyperbolics, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **59** (1989), 101–106.
26. A. Juhl: Secondary invariants and the singularity of the Ruelle Zeta-function in the central critical point, *Bull. Amer. Math. Soc.* **32** (1995), 80–87.
27. N. Wallach: On the Selberg trace formula in the case of compact quotient, *Bull. Amer. Math. Soc.* **82** (1976), 171–195.
28. D. Schueth: Continuous families of quasi-regular representations of solvable Lie groups, *J. Functional Anal.* **134** (1995), 247–259.

UFR de Math, URA 188 du CNRS,
Institut Fourier, 100 rue des Maths – BP 74,
38402 Saint Martin d'Heres Cedex, France